Transposición y morfogénesis didácticas: La denominación como indicio de las formas[1]

RESUMEN:

En este artículo presentaremos un aspecto del proceso de transposición didáctica relativo a la morfogénesis también didáctica, el de la denominación como indicio de la existencia de formas del saber, en un currículum dado. Antes de entrar a nuestra problemática precisaremos el marco teórico en el que nos situamos.

1. Marco teórico

Los procesos transpositivos refieren a las transformaciones que se producen en las organizaciones de los objetos del saber para que éstos puedan ser enseñados. En un primer momento, Yves Chevallard define así el proceso de transposición didáctica;[3]

> "Al ser designado como saber que se enseñará, un contenido del saber sufre —desde ese momento—, un conjunto de transformaciones adaptativas que lo vuelven apto para tomar un lugar entre los *objetos de la enseñanza.* El "trabajo" que transforma un objeto del saber en un objeto de enseñanza, se llama *transposición didáctica.*

Actualmente esta problemática se estudia desde una perspectiva más amplia, la de una "antropología didáctica de los saberes", en donde son fundamentales las no-

Teresa Assude[2]
DIDATECH et IUFM de Grenoble
Francia

[1] Agradezco a David Block por la traducción al español de este artículo.
[2] DIDATECH–Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, IMAG, Université Joseph Fourier, BP 53,38041 Grenoble Cedex 9, France.
[3] Chevallard, 1985, p. 39.

ciones de *objeto,* de *institución,* de *persona,* y de *relación. Ives Chevallard generaliza la problemática transpositiva*[4] *de la siguiente manera:*

> "Dado un saber *S* y una institución *I* en la que *S* existe (por ejemplo, una institución en la que existen las matemáticas, si *S* son las matemáticas), ¿cómo se introdujo *S* en *I*? O, al menos, ¿cómo ocurre que *S* está presente en *I*?

Esas preguntas ubican entonces la problemática de los fenómenos transpositivos, es decir, el trabajo de transformación de los objetos del saber, en una esfera más amplia que la de la escuela, puesto que toda institución con *necesidades en saberes* es susceptible de enfrentar problemas de enseñanza, de formación, o más ampliamente, de comunicación de los saberes.

Nos situaremos aquí en la perspectiva curricular un poco particular del sistema de enseñanza del liceo francés (alumnos de 15 a 18 años). Se trata de analizar por qué cierta forma de saber no existe en un currículum. Para averiguarlo, analizamos un artículo y un libro de enseñanza que pueden considerarse como dos formas de saber que están presentes en la *noosfera* —esfera de interfase entre el sistema de enseñanza en sentido estricto y la sociedad— de la enseñanza secundaria en Francia. Cualquiera que sea el punto de vista que se adopte, para analizar un currículum desde una perspectiva transpositiva, es importante analizar el trabajo que se realiza en la noosfera del sistema. Este término fue introducido en didáctica de las matemáticas por Yves Chevallard para designar "la esfera en la que *se piensa* —con modalidades a veces muy distintas entre sí— el funcionamiento didáctico"[5]. Veremos entonces que el material de análisis que hemos escogido, dirigido principalmente a profesores —y situado algunas veces en el nivel universitario— nos permite comprender, por las diferencias de funcionamiento, lo que pasa en el nivel del liceo.

Para presentar el otro aspecto de nuestro marco teórico, el que se refiere a la morfogénesis didáctica, echaremos mano de una cita de René Thom que ubica bien la perspectiva en la que vamos a introducir los instrumentos de la morfogénesis para estudiar los fenómenos transpositivos[6]:

> "Uno de los problemas centrales planteados al espíritu humano es el de la sucesión de las formas. Cualquiera que sea la naturaleza última de la realidad (suponiendo que esta expresión tenga un sentido) es innegable que nuestro universo no es un caos; distinguimos en él seres, objetos, cosas que designamos con palabras. Tales seres o cosas son formas, son estructuras dotadas de cierta estabilidad; ocupan cierta porción del espacio y duran cierto lapso".

Esta declaración puede servir de introducción a nuestra problemática. En el sistema de enseñanza hay objetos que son formas. Por ejemplo, el programa es una forma pero la identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ también es una forma, de la misma manera que un artículo, o incluso un libro, para el docente. Una forma

[4] Chevallard, 1994, p. 169.
[5] Chevallard, 1985, p. 23.
[6] Thom, 1977, p. 1.

puede ser considerada en niveles distintos de la misma manera que la noción de conjunto puede ser relativa a conjuntos finitos o infinitos. Así, la morfogénesis didáctica es el estudio de las formas didácticas: de su aparición, de su vida y de su desaparición o transformación.

Una vez precisado el marco teórico de nuestra problemática, consideremos la siguiente hipótesis de trabajo: la noción de "formas del saber", como conjunto estructurado de objetos y de interrelaciones entre los objetos, es pertinente para el estudio de los procesos transpositivos (de ahí la conjunción "morfogénesis y transposición"). Intentaremos mostrar un aspecto, aquél en el que los nombres se revelan como indicios de la existencia de ciertas formas. En nuestro estudio de caso, el hecho de que un nombre para designar cierta clase de problemas y de instrumentos para resolverlos exista en la noosfera y, a la vez, esté ausente en la enseñanza del liceo, son indicios de que la organización de los objetos del saber no está necesariamente sometida a las mismas condiciones y restricciones, dependiendo de dónde se ubique. Para sostener esta hipótesis presentaremos un ejemplo acerca de los problemas sobre construcciones con regla y compás, utilizando un artículo de la noosfera y un libro de texto escrito por Félix Klein.

2. La existencia de formas y los nombres

Fueron los griegos quienes originalmente resolvieron problemas relativos a las "construcciones con regla y compás" como problemas geométricos. Lo mismo sucede en la enseñanza secundaria en Francia. Así, frente a estas formas, es más factible decir "hacemos geometría" que decir "hacemos teoría de campos". En cambio, si nos ubicamos como observadores en la noosfera o en la esfera de la sabiduría, probablemente las cosas no sucederían de la misma manera. La noosfera es un espacio en el que las formas del saber pueden vivir con bastante libertad, sin estar atadas a organizaciones precisas, mientras mantengan lazos más o menos estrechos ya sea con el saber sabio[7] o con la vida en el salón de clases. Esta libertad con respecto a las restricciones propias de una esfera sabia o de una esfera de la enseñanza permite la existencia de formas que no pasarán al aula pero que pueden preparar la aparición de formas en los sistemas didácticos. Veamos un ejemplo con un objeto matemático.

El objeto "raíz cuadrada" es de alguna manera un objeto-paradigma, ya que sirvió, durante mucho tiempo, como tal a las actividades matemáticas de la esfera sabia: es el caso de la resolución de ecuaciones algebraicas mediante radicales. A mediados del siglo XIX este problema permanece aún vivo, al igual que el de las construcciones geométricas con regla y compás. Es de estos problemas que trata, en parte, el artículo de J-C. Carrega titulado *La regla, el compás y la teoría de campos*, publicado en el boletín de la APMEP[8]. Este artículo nos interesa para

[7] Yves Chevallard habla de la esfera del "saber sabio" para referirse al espacio en el que se producen las matemáticas.

[8] Carrega, 1981, Bulletin de l'APMEP, No. 314, pp. 601-629. Un libro del mismo autor y sobre el mismo tema se publicó posteriormente al artículo. Sólo utilizaremos el artículo para nuestro propósito.

mostrar que el autor parte de problemas geométricos que resolverá con la ayuda de herramientas o medios algebraicos: partir de una problemática en un marco puede llevar a utilizar herramientas de otro marco sin que esto sea un problema. Es lo que Regine Douady llama "el cambio de marco", que de hecho constituye una práctica común en la esfera sabia pero es poco común en la esfera de la enseñanza[9].

El artículo de Carrega presenta primero los problemas que se habrán de tratar y que son precisamente los problemas —célebres desde la Antigüedad— sobre construcciones con regla y compás, como la **cuadratura del círculo,** la **duplicación del cubo,** o la **trisección del ángulo.** Estos problemas se abordan, en lo que sigue del artículo, mediante la teoría de campos, y especialmente la teoría de campos constructibles: están ahí los *problemas* y los medios o *herramientas* para tratarlos. En esta presentación se dedica una primera parte a los puntos y números constructibles, y a la construcción de puntos cuyas coordenadas son números racionales o reales cuadráticos. Así, se dice que un punto es constructible si está en la intersección de dos rectas, de una recta y de un círculo, o de dos círculos. Un número constructible es una de las coordenadas de un punto constructible, considerando en el plano un sistema de referencia (O, I, J). El objeto "raíz cuadrada permite entonces pasar de intersecciones de rectas a intersecciones que incluyen círculos, ya que las primeras implican operaciones con racionales, pero, en las segundas, la resolución de ecuaciones de segundo grado genera raíces cuadradas. Después, en una segunda parte, el autor caracteriza al campo de los números constructibles: el campo C de los números constructibles es el más pequeño subcampo de R (reales), cerrado para la raíz cuadrada, es decir que el campo C verifica la propiedad siguiente:

$$si\, x = C \quad y \quad x \geq 0, \quad \text{entonces} \quad \sqrt{x} = C.$$

Finalmente, en una tercera parte, el autor caracteriza a los números constructibles presentando, entre otros, el resultado de Wantzell: todo número constructible es algebraico en Q y su grado es una potencia de dos. Este resultado va a servir entonces para resolver los problemas planteados al principio; por ejemplo, para concluir que π no es constructible como tampoco lo es la raíz cúbica de 2.

Como lo sugiere el título del artículo, el nombre "la regla, el compás y la teoría de los campos" permite *reconocer las formas* por medio de las cuales los problemas se presentan y se resuelven con un cierto número de medios. El título acerca de los marcos a los que pertenecen los problemas y acerca de los instrumentos que sirven para resolverlos.

Podríamos pensar que la casi inexistencia de formas como las que se presentan en el artículo citado, en la enseñanza secundaria, se debe al hecho de que este campo de estudio es bastante reciente; sin embargo, existen obras muy antiguas dirigidas a la enseñanza, en las que estos problemas fueron abordados con medios algebraicos. Presentaremos someramente el camino que se siguió en una de estas obras, para preguntarnos enseguida por qué una senda así no pasó a la enseñanza secundaria.

[9] Aquí hablaremos básicamente de la enseñanza secundaria en Francia, que comprende alumnos entre 15 y 18 años.

3. Un recorrido a través de algunas obras transpositivas

La obra de Félix Klein titulada *Lecciones sobre Ciertas Cuestiones de Geometría Elemental,* tiene el propósito de acercar la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria. En el prefacio, el autor presenta la obra como el resultado de notas de un curso de verano y afirma que[10]:

> La mayor precisión de las definiciones, el mayor rigor de los métodos de demostración debidos a la ciencia moderna, son considerados por la mayoría de los profesores del gimnasio como difíciles de comprender y de una abstracción exagerada; por lo tanto, parecen no tener importancia más que para el círculo restringido de los especialistas.
>
> Pienso de manera diferente. En el verano pasado, durante una serie de lecciones de dos horas, delante de un auditorio más considerable que el de costumbre, tuve el placer de presentar lo que la ciencia moderna nos permite afirmar acerca de la posibilidad de las construcciones de la Geometría Elemental.

Así, según F. Klein, quien se refiere aquí a las herramientas algebraicas para resolución de ecuaciones algebraicas, las herramientas de la ciencia moderna van a servir para resolver los tres problemas que señalamos antes. El autor todavía precisa que esta obra "debe su existencia al deseo de acercar los estudios matemáticos de la universidad a los de las escuelas secundarias, y de establecer un contacto más íntimo que el de costumbre"[11]. Esta obra didáctica de F. Klein parte, por lo tanto, de los problemas citados y del siguiente: "¿Qué problemas podemos o no podemos construir geométricamente?"[12] y hace explícito el método que se seguirá, así como los campos en los que se deben buscar los instrumentos o medios necesarios para la resolución del problema[13]:

> Resulta singular que la Geometría Elemental no baste para responder a la pregunta planteada. El auxilio del álgebra y del análisis se vuelve necesario, y debemos entonces preguntarnos cómo se expresa, en su lenguaje, el empleo de la regla y del compás para las construcciones.

En la *Introducción* el autor presenta el siguiente teorema[14]:

> La condición necesaria y suficiente para que una expresión analítica pueda construirse con regla y compás, es que ésta se deduzca de las magnitudes conocidas a través de operaciones racionales o mediante raíces cuadradas en cantidad finita.

y vuelve enseguida a la resolución del problema planteado[15]:

[10] Klein F., 1986, p. 7.
[11] op. cit., p. 9.
[12] op. cit., p. 10.
[13] op. cit., p. 11.
[14] op. cit., 11.
[15] ibíd.

> Por consiguiente, para demostrar que una magnitud no puede construirse con regla y compás, bastará con mostrar que la ecuación que la produce no se puede resolver mediante un número finito de raíces cuadradas.
> Con mayor razón será así cuando la ecuación del problema no sea algebraica.

La obra continúa con la presentación técnica de lo que el autor afirmó en la introducción, pero lo que nos interesa subrayar es que, una vez más, son los problemas y los medios para resolverlos los que son centrales, y que la imbricación de campos es absolutamente primordial. El título del libro, *Lecciones sobre ciertas cuestiones de Geometría Elemental,* ubica por lo tanto los problemas de los que se parte, pero no incluye los medios. Desde el punto de vista de la cultura del sistema de enseñanza secundaria, ¿a qué campo corresponden estas prácticas?, ¿se está haciendo geometría?, ¿álgebra?, ¿análisis?

Una organización didáctica de la enseñanza secundaria tendría dificultad para integrar estas formas puesto que no habría —en la cultura de este sistema— nombres que permitieran identificarlas de manera que se pudieran introducir en una sola categoría. Esta obra de F. Klein representa uno de los primeros pasos, en el proceso de transposición didáctica, de lo que posteriormente ha de constituir uno de los objetivos del álgebra, a saber, el estudio de las estructuras y, principalmente, el estudio de los campos conmutativos y de los problemas asociados sobre la resolución de ecuaciones algebraicas y las construcciones con regla y compás. Sin embargo, este tipo de problemática no existirá realmente en la enseñanza secundaria.

Sin analizarlas, mencionaremos otras obras transpositivas acerca de este tema. En 1950 se publicó la obra *Lecciones sobre las construcciones geométricas* elaborada a partir de los cursos dictados en el Colegio de Francia por H. Lebesgue en 1940-1941[16]. Aquí, como en el libro de F. Klein, el autor estudia los problemas de las construcciones geométricas con regla y compás con la ayuda de instrumentos y teorías modernas. El libro está organizado en tres partes tituladas como sigue: *Los procedimientos de construcción, Los problemas algebraicos y geométricos motivados por los estudios de constructibilidad,* y *Curvas constructibles por puntos con la ayuda de la regla.* La imbricación entre los campos algebraico y geométrico está aquí presente, ya que el autor parte de problemas que hay que resolver y de medios y teorías para resolverlos: estos campos no están separados como en la organización del sistema de enseñanza secundaria.

La existencia de la geometría analítica en la enseñanza secundaria puede ser vista como un ejemplo que cuestiona lo que acabamos de decir ya que, en tal geometría, se relacionan la geometría y el álgebra. Sin embargo, parece que esto mismo nos da la razón: la existencia del nombre "geometría analítica" permite reconocer una forma determinada de ciencia geométrica debido a que el trabajo transpositivo ya permitió naturalizar esta forma en la cultura del sistema de enseñanza, y éste no es el caso para los problemas de constructibilidad asociados a los instrumentos algebraicos.

[16] Lebesgue 1950.

Sin embargo, tales problemas no están muertos para la enseñanza, puesto que pueden existir en la enseñanza universitaria actual, en donde se les dedican manuales universitarios: para no citar más que dos; por ejemplo el libro de C. Mutafian, cuyo título es *Ecuaciones algebraicas y teoría de Galois*[17], o también el libro de I. Stewart de nombre *Galois Theory*[18].

Uno de los tipos de denominación corresponde, de esta manera, a formas del saber organizadas en torno a problemas y en torno a medios y teorías que permiten resolverlos, lo que no coincide necesariamente con el tipo de denominación que prevalece en la enseñanza secundaria.

4. El proceso de transposición y morfogénesis didácticas

Los ejemplos presentados en las partes 2 y 3 de este artículo constituyen un medio para plantear un problema relativo al proceso de transposición didáctica. ¿Por qué los problemas que acabamos de ver no están presentes en el sistema de enseñanza secundaria? El proceso de transposición didáctica, tal y como ha sido definido, concierne a las transformaciones de los objetos del saber. Sin embargo, nos parece que los objetos se manifiestan a través de formas y éstas aparecen, viven y se transforman a todo lo largo de un proceso. En nuestros ejemplos hemos visto un aspecto relativo a la denominación, ya que nos parece que uno de los medios para reconocer las formas es mediante la intermediación de los nombres que las designan. Cuando estas formas son creadas por matemáticos-productores de objetos del saber, o por matemáticos próximos a esta esfera (por ejemplo, en la enseñanza universitaria), llevan con frecuencia nombres relativos a los problemas tratados y eventualmente a los medios y teorías utilizados para resolverlos: por ejemplo, *Geometría elemental y teoría de campos*. Estos nombres señalan que la división entre los dominios matemáticos en la esfera sabia no es rígida y que puede pasarse de un dominio a otro según las necesidades. Sin embargo, en el sistema de enseñanza secundaria, la organización de los objetos del saber no está hecha a partir de los problemas y de los instrumentos que sirven para resolverlos, sino a partir de contenidos que pertenecen a grandes categorías —aritmética, álgebra, trigonometría, análisis, estadística, etc.— bastante rígidas y que persisten aun en ciertos sistemas de enseñanza. En Francia hubo una reforma de la educación en las matemáticas que quiso acercar la enseñanza secundaria a la universitaria —la reforma llamada "de las matemáticas modernas"— que intentó precisamente romper esta separación entre categorías. Actualmente, en el liceo todavía se encuentran grandes categorías, como la geometría, el álgebra, el análisis o la probabilidad, entre otras.

Así, en lo que respecta a las formas antes presentadas, su existencia en la enseñanza secundaria implicaría una imbricación entre los campos geométrico y algebraico, que se manifestaría a través de los nombres de esas formas: relacionar la geometría elemental plana y la teoría de campos implica una forma didáctica que no ha encontrado un nombre aceptable en la cultura de la enseñanza secundaria.

[17] Mutafian 1980.
[18] Stewart 1973.

El sistema tiene que poder mostrar esas categorías para que los actores del sistema puedan decir que hacen "geometría" o que hacen "estadística", etc. La probabilidad de que aparezcan nombres como "Geometría elemental y teoría de los campos" o "Construcciones geométricas y teoría de los campos" o aun "Ecuaciones algebraicas y teoría de los campos", es muy débil puesto que asocian campos que son vistos (por la institución) como bastante alejados.

Como vemos, el estudio de los nombres constituye una manera de reconocer las formas posibles en una organización didáctica determinada, puesto que son indicios de una cierta organización de objetos del saber. La posibilidad de dar un nombre reconocido por la institución, a una forma dada, es una de las condiciones de existencia de ésta en un sistema determinado y en un momento dado, de ahí el interés por el estudio de la morfogénesis didáctica, incluso si esta última no se reduce a los problemas relativos a la denominación.

El presente estudio permite poner en evidencia también que la existencia de una forma está igualmente ligada a las funciones que viene a cumplir en el seno de cierta organización, pero no abordaremos aquí este problema.

Bibliografía

Carrega J-C. (1981), "La règle, le compas et la théorie des corps", *Bulletin de l'APMEP,* núm 314, pp. 601-629.

Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique — Du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage, Grenoble, 1-ème édition. Deuxième édition 1991.

Chevallard Y. (1989), "Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel", *Actes du Seminaire de Didactique des Mathématiques,* Grenoble, IMAG.

Chevallard Y. (1992), "Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, núm. 1, pp. 73-112.

Chevallard Y. (1994), "Les processus de transposition didactique", in *La transposition didactique à l'épreuve,* ouvrage coordonné par Arsac G., et alii, La Pensée Sauvage, éditions, Grenoble, pp. 135-180.

Douady R. (1986), "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 7, núm. 1, pp. 5-31.

Klein F. (1986), *Leçons sur certaines questions de Géométrie Elémentaire,* traduit par J. Griess, Librairie Nony & Cie, Paris.

Lebesgue H. (1950), *Leçons sur les constructions géométriques,* Editions Jacques Gabay, Paris, réédition 1987.

Mutafan C. (1980), *Equations algébriques et théorie de Galois,* Vuibert, Paris.

Steward I. (1973), *Galois Theory,* Chapman and Hall, London.

Thom R (1977), *Stabilité structurelle et morphogénèse,* Interéditions Paris, 2ème édition.